

# 2014학년도 목원대학교 수학교육과 3차 졸업시험

## 수 학

1차 시험	2교시 전공A	21문항 50점	시험 시간 90 분
-------	---------	----------	------------

- 문제지 전체 면수가 맞는지 확인하시오.
- 문항의 문항에는 배점이 표시되어 있습니다.

### 기입형 【1~15】

1. 다음은 2009 개정 수학교육과정에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르시오.[2점]

- ㉠ 중학교에서 배웠던 집합과 명제 내용이 수학 1으로 이동하였다.
- ㉡ 중학교의 수와 연산영역에서 십진법, 이진법이 삭제되었다.
- ㉢ 중학교의 확률과 통계영역에서 누적도수가 삭제되었다.
- ㉣ 중학교의 기하영역에서 두 원의 위치관계는 다루되 직관적으로 이해하게 한다.

2. 박교사는 다항식의 곱셈과 관련하여 다음의 학습 내용을 ①에서부터 순서대로 지도하려고 한다.

- ①  $(a+b)(c+d)$ 의 전개
- ②  $(a+b)^2$ 의 전개
- ③  $101^2$ 의 계산

이 때, 박 교사가 계획한 학습 내용의 지도 순서와 관련하여, 다음과 같은 박교사의 생각에 반영되어 있는 원리를 쓰시오.[2점]

저는 지식의 표현 방법도 중요하지만 그 지식의 지도 순서도 중요하다고 생각합니다. 그래서 저는 학생들에게 일반적인 개념이나 원리를 먼저 지도하고, 이 개념을 발판으로 하여 이어지는 학습 내용을 점점 특수화하고 세분화하는 형태로 지도 할 때 학생들에게 의미 충실한 학습이 될 수 있다고 생각합니다.

3. 다음은 중학교 3학년 학생이 작성한 이차방정식의 해를 구한 답안이다.

[문제1] 다음 방정식의 해가 존재하는지 판별하고, 존재하면 해를 구하여라.

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x^2+x+1=0$$

$$a=1, b=1, c=1$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

위와 같이 문제를 어떻게 해결해야 할지, 왜 그렇게 풀이해야 하는지 알지 못하고 암기한 규칙을 문제해결에 적용하는 것을 스킴프(R. skemp)는 무엇이라 하는지 쓰시오.[2점]

**4.** 다음은 극단적인 교수현상에 대한 설명이다.

- ㄱ. 어떤 교사가 중학교 학생들에게 함수의 그래프를 지도하기 위하여 보조 수단으로 그래프 계산기를 사용하는 경우에 학생들이 그래프 계산기를 조작하여 신기한 결과를 얻는 데 집중한다.

ㄴ. 학생의 개인화, 문맥화 과정을 지나치게 강조한 결과로서 방편적 수단이 많아질수록 학습-지도 과정이 점점 본래의 궤도를 벗어날 수 있다.

위와 같은 극단적인 교수학적 현상을 무엇이라고 하는지 쓰시오. [2점]

**5.** 법 27의 모든 원시근을 구하시오(모두 지수표현으로 구할 것). [2점]

**6.** 정수환  $\mathbb{Z}$ 에 대해  $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ 의 모든 단위(unit)을 구하시오. [2점]

7. 군  $G$ 의 원소  $a$ 와 항등원이 아닌 원소  $b$ 에 대하여  $b^2 = aba^{-1}$ 이고  $a$ 의 위수가 5일 때,  $b$ 의 위수를 구하십시오. [2점]

8. 특이적분  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+2} dx$ 의 값을 구하십시오. [2점]

9. 두 실수열  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$ 에 대하여, 두 수열  $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ ,  $\{\sqrt[n]{|b_n|}\}$ 이 각각 3, 4에 수렴할 때, 수열  $\{\sqrt[n]{|a_n+b_n|}\}$ 의 극한값을 구하십시오. [2점]

10. 이변수함수  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  가  $f(x, y) = \int_{xy}^{x^2+y^2} e^{-(t-1)^2} dt$

로 주어질 때, 편미분계수  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 0)$ 을 구하시오. [2점]

11. 곡선  $C_\theta$ 를 곡면  $M: x^2 + y^2 = 1$ 과 평면

$$P_\theta: \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)z = 0, \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$

의 교선이 라 하자. 곡선  $C_{\frac{\pi}{4}}$ 의 곡률의 최댓값과 최솟값을 각각  $a$

와  $b$ 라 할 때,  $ab$ 의 값은? [2점]

12. 곡면  $M$ 을  $xz$ 평면위의 원  $(x-3)^2 + z^2 = 1$ 을  $z$ 축을

회전축으로 하여 회전시킨 원환면이라 하자.  $M$ 의 겉넓이는 얼마인가? [2점]

13. 자연수 집합  $\mathbb{N}$ 과 자연수  $n$ 에 대하여

$A_n = \{k \in \mathbb{N} : k \geq n\}$ 이라 하자.  $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ 을 기저로 하는  $\mathbb{N}$ 의 위상을  $T$ 라 하고  $X = (\mathbb{N}, T)$ 라 하자. 함수  $f: \mathbb{R} \rightarrow X$ 를  $f(x) = \lfloor x \rfloor + 1$ 로 정의하고  $\mathbb{R}$ 의 위상  $T_1$ 을  $T_1 = \{f^{-1}(G) : G \in T\}$ 이라 하자. 위상공간  $(\mathbb{R}, T_1)$ 에 대하여 옳은 것만 아래에서 고르시오 (단,  $\lfloor x \rfloor$ 는  $x$ 를 넘지 않는 최대 정수이다). [2점]

ㄱ.  $X$ 는 연결공간이다.

ㄴ.  $(\mathbb{R}, T_1)$ 에서 수열  $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ 은 수렴하지 않는다.

ㄷ.  $(\mathbb{R}, T_1)$ 은 콤팩트(compact) 공간이 아니다.

14. 다음은 주어진 힐베르트의 합동공리들을 사용하여 명제

$\triangle ABC$ 에서  $AB \cong AC$ 이면  $\sphericalangle B \cong \sphericalangle C$ 이다.

를 증명한 것이다. ( )안에 알맞은 것을 차례대로 쓰시오. [2점]

합동공리 5.  $\sphericalangle A \cong \sphericalangle B$ 이고  $\sphericalangle A \cong \sphericalangle C$ 이면  $\sphericalangle B \cong \sphericalangle C$ 이다. 특히 모든 각은 그 자신과 합동이다.

합동공리 6. 두 삼각형에서 대응하는 두 변과 그 사잇각이 각각 서로 합동이면 두 삼각형은 합동이다.

주어진 명제의 증명:

꼭짓점들의 대응  $A \leftrightarrow A, ( )$ ,  $( )$ 를 고찰하자. 가정과 합동공리  $( )$ 에 의하여, 이 대응 아래서  $\triangle ABC$ 의 두 변과 그 사잇각은 각각  $( )$ 의 대응변 및 그 사잇각과 각각 합동이다.

합동공리  $( )$ 에 의하여  $\triangle ABC \cong ( )$ 이고, 삼각형의 합동의 정의에 의하여 대응각  $\sphericalangle B$ 와  $\sphericalangle C$ 는 합동이다.

15. 이산형 확률변수  $X$ 의 적률생성함수(moment generating function)가 다음과 같다.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}e^t + \frac{1}{6}e^{2t} \quad (\text{단, } t \text{는 실수})$$

이 때, 확률변수  $Y = X^2$ 의 평균과 분산을 구하시오. [2점]

**서술형 【1~6】**

1. 다음은 고등학교 ‘확률과 통계’ 수업의 한 장면이다. 다음을 읽고 물음에 답하시오.

**[교과서의 내용]**

모집단으로부터 크기가  $n$ 인 표본을 임의추출하여 실제로 얻은 표본평균  $\bar{X}$ 의 값을  $\bar{x}$ 라 할 때,

$$\bar{x} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

을 모평균  $m$ 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이라고 한다.

교사: 표본조사의 목적은 모집단 전체를 조사하지 않고, 그 일부인 표본을 조사하여 얻은 정보를 바탕으로 모집단의 특성을 알아보려는데 있어요.

학생1: 네에. 그럼 표본을 뽑아야 하겠네요.

교사: 네, 그리고 표본에서 얻은 정보를 이용하여 모집단의 특성을 확률적으로 추측하는 것을 추정이라고 해요.

...

교사: 위와 같은 식을 얻었어요. 그리고 모평균  $m$ 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은 위의 식에서 계수가 2.58이 되고 나머지는 같아요. 교과서에 나와 있지요?

학생 2: 그럼 위의 식에서요 나온 것이 95% 믿을 수 있다는 뜻인가요?

교사:

위에서 밑줄친 학생 2의 질문에 대한 교사의 답을 쓰시오. [3점]

2. (선대/서술형: 4점) 실수체  $\mathbb{R}$ 상의 벡터공간  $\mathbb{R}^2$  위에서 선형사상  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 이  $T(x, y) = (2x - y, -6x + y)$ 로 주어질 때, 다음을 구하라.

2-1.  $\mathbb{R}^2$ 의 표준기저  $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ 에 관한  $T$ 의 행렬  $[T]_B$ 을 구하라. [1점]

2-2.  $T$ 의 역함수  $T^{-1}$ 의 고유치(eigenvalue)를 구하라. [1점]

2-3.  $T^{-1}$ 를 대각화하는 기저 한 쌍을 구하라. (단, 기저의 좌표성분은 정수로 구할 것) [2점]

3. 임의의  $\epsilon > 0$ 에 대하여 그에 대응하는 실수  $M > 0$ 이 존재하여 서로 다른 임의의 두 실수  $x, y$ 에 대하여 조건

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| > M \text{ 이면 } |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

를 만족할 때,  $f$ 는  $\mathbb{R}$ 에서 평등연속(균등연속, uniformly continuous)임을 증명하시오. [4점]

4. 실수 집합  $\mathbb{R}$  위의 보통위상  $T_u$ 에 대하여  $X=(\mathbb{R}, T_u)$ 이

라 하자. 유리수 집합  $\mathbb{Q}$ 에 대하여 함수

$f:\mathbb{Q}\rightarrow X$ 를  $f(x)=x^2$ 으로 정의하고  $\mathbb{Q}$  위의 위상  $T_1$ 을  $T_1=\{f^{-1}(G): G\in T_u\}$ 으로 정의하자.

$(\mathbb{Q}, T_1)$ 의 부분집합으로 정수 집합  $\mathbb{Z}$ 를 생각할 때,  $\mathbb{Z}$ 의 내부  $\mathbb{Z}^\circ$ 와  $\mathbb{Z}$ 의 폐포  $\overline{\mathbb{Z}}$ , 그리고  $\mathbb{Z}$ 의 경계  $b(\mathbb{Z})$ 을 구하는 과정을 서술하시오. [3점]

5. 어떤 도시에서 수도물에 불소를 넣어 공급하는 것에 대한 찬성률을 추정하기 위한 조사가 수행되었다. 표본에 의한 찬성률과 도시 전체의 실제 찬성률과의 차이가 1% 이내로 됨을 적어도 95%로 확신하기 위해 조사되어야 하는 최소 인원을 구하시오. [3점]

6. 하노이탑은 구멍 뚫린 원판을 넣기에 알맞은 3개의 기둥  $A, B, C$ 가 있고 크기가 다른 구멍 뚫린 원판  $n$ 개가 있다. 가장 큰 원판이 가장 밑에 있고 크기 순서대로 기둥  $A$ 에  $n$ 개가 쌓여 있을 때, 1개씩 다른 기둥으로 옮길 때 작은 판은 항상 큰 판 위에 오도록 옮긴다. 이 때, 기둥  $A$ 에서 기둥  $C$ 로 모두 옮기는 횟수를  $a_n$ 이라 할 때 점화식을 구하고,  $a_n$ 을 구하시오. [3점]

<수고하셨습니다.>

# 2014학년도 목원대학교 수학교육과 3차 졸업시험

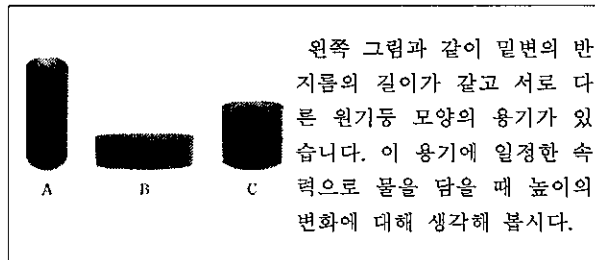
## 수 학

1차 시험	3교시 전공B	5문항 30점	시험 시간 90 분
-------	---------	---------	------------

- 문제지 전체 면수가 맞는지 확인하시오.
- 문항의 문항에는 배점이 표시되어 있습니다

### 서술형 【1~4】

- 1.** 함수를 표, 그래프, 식과 같이 표현하는 방식은 수치적인 특성이 있어서 함수 관계를 형식화하는데 도움이 된다. 특히 그래프는 표와 식에 비하면 아주 정확하지는 않지만 전체적인 개관을 통해 함수의 특성을 쉽게 파악할 수 있다.



그래프를 의미 있게 사용하려면 여러 가지 접근 방식의 통합이 필요하다. 위의 상황을 그래프 학습과 관련하여, 먼저 여러 가지 용기에 물을 담을 때 물의 높이의 변화를 추측하게 한다. 그 다음 대략적으로 그래프를 그려보게 한 후 어떠한 활동을 하도록 하는 것이 바람직한지 설명하시오. [3점]

- 2.**  $\mathbb{R}^3$ 의 부분집합  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R} : x + y + z = 0\}$ 와 한 점  $p = (1, 1, 1)$ 에 대하여  $X = A \cup \{p\}$ 이라 하자.  $X$  위의 위상  $T$ 를  $T = P(A) \cup \{G \subset X : p \in G, A - G \text{는 유한집합}\}$ 으로 정의할 때,  $(X, T)$ 는 콤팩트(compact)공간임을 보이시오 (단,  $P(A) = \{B : B \subset A\}$ 이다). [3점]



3. (대수/서술형 7점) 유리수체  $\mathbb{Q}$  위의 다항식

$f(x) = x^3 + 2x + 2$ 의 한 근을  $\theta$ 라 할 때

3-1.  $\mathbb{Q}$ 의 대수적 확대체  $\mathbb{Q}(\theta)$ 를 집합으로 나타내시오. [2점]

3-2. 곱셈역원  $(\theta + 2)^{-1}$ 를 구하시오. [2점]

3-3.  $\theta$ 가 실근일 때,  $\mathbb{Q}$ 를 고정하는 자기동형군  $G(\mathbb{Q}(\theta)/\mathbb{Q})$ 의 위수를 구하시오. [3점]

4. 다음 물음에 답하시오. 해석

4-1. 두 실수  $a$ 와  $b$ 에 대하여 복소함수

$$f(x+iy) = (x^3 - 2axy - by^2) + i(2x^2 - ay^2 + bx^2y - y^3)$$

( $x, y$ 는 실수)

가 정함수(entire function)일 때,  $a, b$ 의 값을 구하시오. [3점]

4-2. 복소함수  $\frac{1}{z}$ 을 적절한 곡선 위에서 적분함으로써  
등식

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} = \frac{2\pi}{ab}$$

가 성립함을 증명하시오. [4점]

**논술형 【1】**

1. 다음은 중학교 2학년 수학에서는  $0.\dot{9} = 1$ 의 관계를 설명하는 내용의 일부이다. [10점]

순환마디가 9 하나뿐인 순환소수  
 $0.\dot{9}, 0.0\dot{9}, 0.00\dot{9}, \dots$   
 를 분수로 나타내어 보자.  
 먼저,  $0.\dot{9}$ 의 경우에  $0.\dot{9}$ 를  $x$ 로 놓으면  
 $x = 0.999999\dots$  ..... ㉠  
 이다. ㉠의 양변에 10을 곱하면  
 $10x = 9.999999\dots$  ..... ㉡  
 이므로, ㉠에서 ㉡을 뺀다 하면  
 $9x = 9$  ..... ㉢  
 이다. 따라서,  
 $x = \frac{9}{9} = 1$   
 이다.

- (1) 위와 같이 무한급수의 합을 정적인 관점의 '결과'로 간주하여 하나의 값으로 놓게 되는 경우 모순된 결과를 가져온다. 모순된 결과에 대해 예를 들어 쓰시오.

- (2) 위와 같은 모순된 결과를 얻는 이유는 무엇인지 쓰고, 모순을 극복하는 방법을 쓰시오.

<수고하셨습니다.>